**2021年普通高等学校招生全国统一考试（全国甲卷）**

**理科数学**

一、选择题

1.设集合，，则（ ）

A.

B.

C.

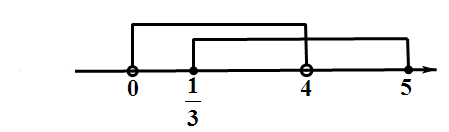
D.

答案：

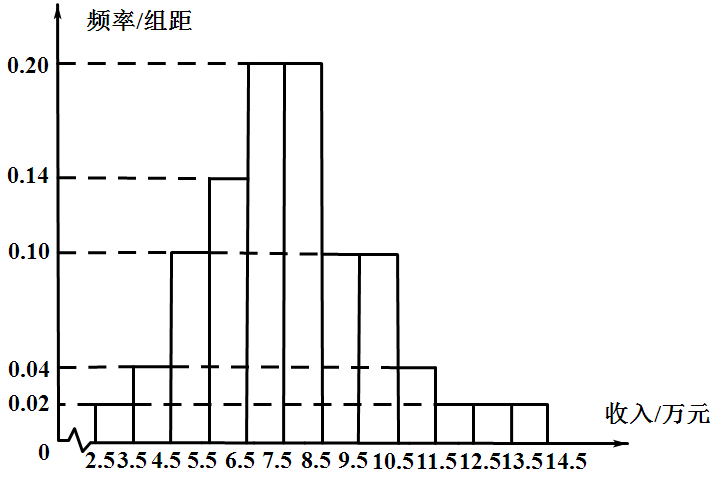
B

解析：

由图知，.



2.为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论不正确的是（ ）

A.该地农户家庭年收入低于万元的农户比率估计为

B.该地农户家庭年收入不低于万元的农户比率估计为

C.估计该地农户家庭年收入的平均值不超过万元

D.估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于万元至万元之间

答案：

C

解析：

A.低于万元的比率估计为，正确.

B.不低于万元的比率估计为，正确.

C.平均值为

万元，不正确.

D.万到万的比率为，正确.

3.已知，则（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

B

解析：

.

4.青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量，通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据和小数记录法的数据满足.已知某同学视力的五分记录法的数据为，则其视力的小数记录法的数据约为（）（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

C

解析：

代入，知，故.

5.已知，是双曲线的两个焦点，为上一点，且，，则的离心率为（ ）

A.

B.

C.

D.

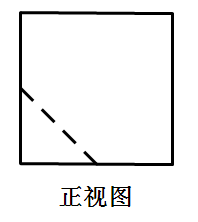
答案：

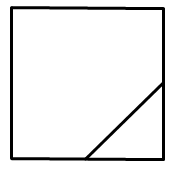
A

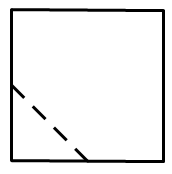
解析：

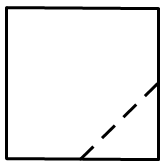
记，，由及，得，，又由余弦定理知，得，从而.

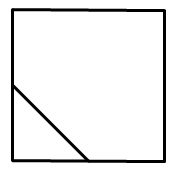
6.在一个正方体中，过顶点的三条棱的中点分别为，，，该正方体截去三棱锥后，所得多面体的三视图中，正视图如图所示，则相应的侧视图是（ ）



A.

B.

C.

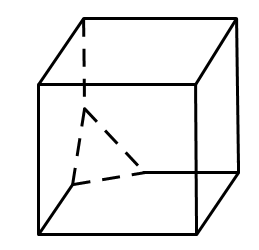
D.

答案：

D

解析：

由题可得直观图，如下图.



故选D.

7.等比数列的公比为，前项和为，设甲：，乙：是递增数列，则（ ）

A.甲是乙的充分条件但不是必要条件

B.甲是乙的必要条件但不是充分条件

C.甲是乙的充要条件

D.甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

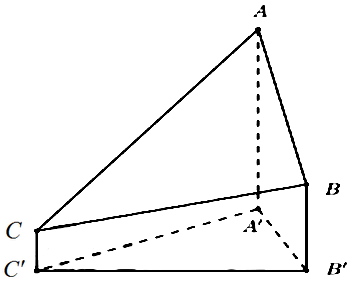
答案：

B

解析：

若，则.①，则单调递增；②，则单调递减，∴甲乙，又若单调递增，则恒成立，∴恒成立，∴，，∴甲乙.综上：甲乙，选B.

8.2020年12月8日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为（单位:)，三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一．右图是三角高程测量法的一个示意图，现有，，三点，且，，在同一水平面上的投影，，满足，.由点测得点的仰角为，与的差为:由点测得点的仰角为,则，两点到水平面的高度差约为（ ）（）



A.

B.

C.

D.

答案：

B

解析：

过C作的垂线交于点M，过B作的垂线交于点N，

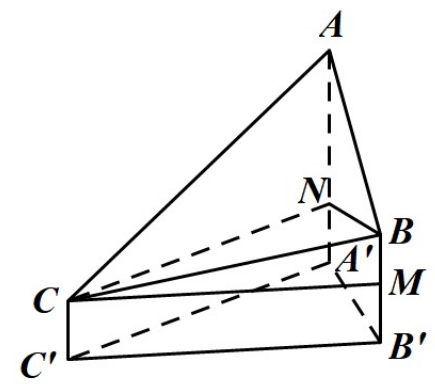
由题意得，，，即.

所以

，

所以

.得A，C两点到水平面的高度差约为，故选B。



9.若，，则（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

A

解析：

.

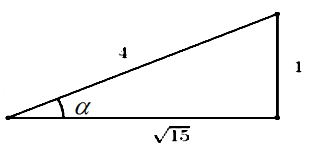


∴

∴

∴.

又∵.如图，.



10.将个和个随机排成一行，则个不相邻的概率为（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

C

解析：

把位置依次标为到.

总数：先排个，有种，再排个，有一种，故共有种.

满足题设的排法：先排个，有种.其间有个空，选个空插入有种.故.

满足题设排法的另一种解释：的位置有，，，，，，，，，，共种.

11.已知是半径为的球的球面上的三个点，且，，则三棱锥的体积为（ ）

A.

B.

C.

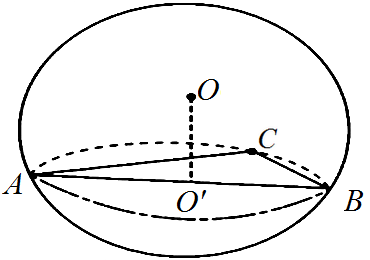
D.

答案：

A

解析：

记为所在圆面的圆心，则.



又，所以

.

所以.故选A.

12.设函数的定义域为，为奇函数，为偶函数，当时，.若，则（ ）

A.

B.

C.

D.

答案：

D

解析：

∵为奇函数，∴关于中心对称，∴.

因为偶函数，故关于轴对称，周期为.

∴，.即，.

，.

故

.

故选D.

二、填空题

13.曲线在点处的切线方程为 .

答案：

.

解析：

，，.

切线：.

14.已知向量，，.若，则 .

答案：



解析：

，.所以.

15.已知，为椭圆的两个焦点，，为上关于坐标原点对称的两点，且，则四边形的面积为 .

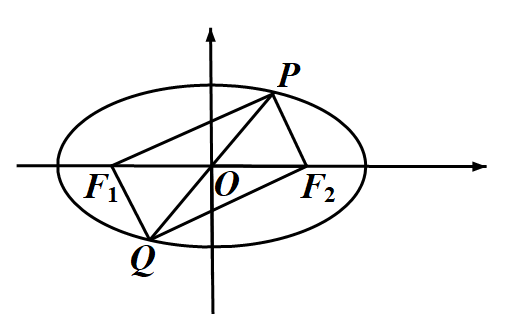
答案：



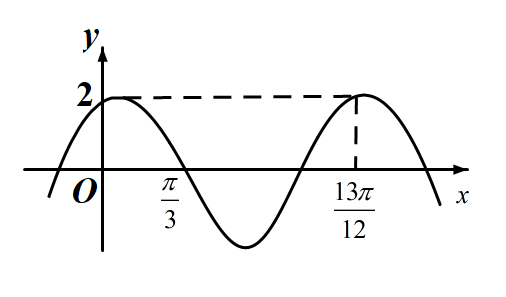
解析：

如图，由及椭圆对称性可知，四边形为矩形.

设，，则，得.所以，四边形面积为.



16.已知函数的部分图像如图所示，则满足条件的最小正整数为 .



答案：



解析：

由图可知，的最小正周期，∴.

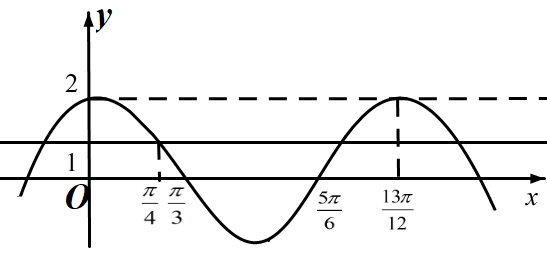
∵，∴，∴，.

∴，∴，.

∴或.

结合图像可知，满足的离轴最近的正数区间，无正数；

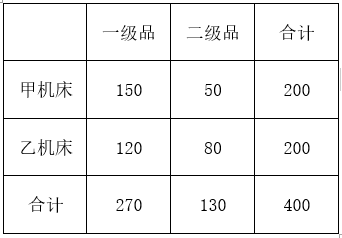
的离轴最近的正数区间为，最小正整数.



三、解答题

（1）必考题

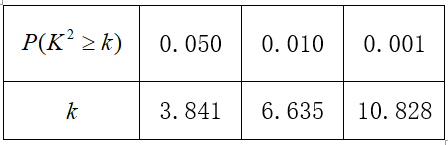
17.甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品，为了比较两台机床产品的质量，分別用两台机床各生产了件产品，产品的质量情况统计如下表：



（1）甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少？

（2）能否有的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异？

附：，



答案：

见解析

解析：

（1）由表格数据得：

甲机床生产的产品中一级品的频率为；

乙机床生产的产品中一级品的频率为；

（2）由题意.

所以有的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.

18.已知数列的各项均为正数，记为的前项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

①数列是等差数列：②数列是等差数列：③.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分，①，

答案：

见解析

解析：

①，,证明：设等差数列的公差为.因为，所以，

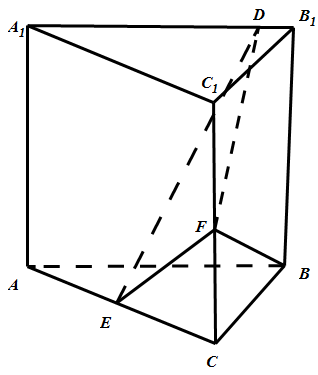
则.所以，所以

.所以是首项为，公差为的等差数列.

19.已知直三棱柱中，侧面为正方形，，，分别为和的中点，为棱上的点，.

（1）证明：；

（2）当为何值时，面与面所成的二面角的正弦值最小？



答案：  
见解析；

解析:  
（1）

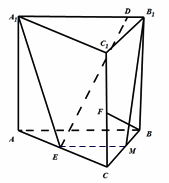
连，取中点连，，

由为，的中点，则，

又，，则共面，故面.

又在侧面中，则

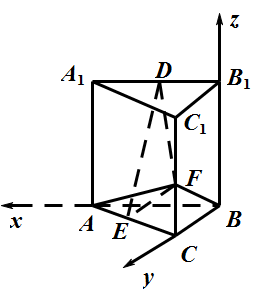
又，则.



（2），则.

又则.

如图以为原点建立坐标轴，则，，，，.



设则.

则面法向量为，对面设法向量为，则

，

则.

要求最小正弦值则求最大余弦值.

当时二面角余弦值最大，则时二面角正弦值最小.

20.抛物线的顶点为坐标原点，焦点在轴上，直线交于，两点，且，已知点，且与相切.

（1）求，的方程；

（2）设，，是上的三个点，直线，均与相切，判断直线，与的位置关系，并说明理由.

答案：  
见解析；

解析：  
（1）， .

（2）设，，.

，所以

①.

，所以

②.

所以，是方程的两根.

又，所以

.

所以，即直线与相切.

21.已知且，函数.

（1）当时，求的单调区间；

（2）若曲线与直线有且仅有两个交点，求的取值范围.

答案：  
见解析；

解析：  
（1）时，，

.

当时，，单调递增；当时，，单调递减.

故在上单调递增，在上单调递减.

（2）由题知在有两个不等根；

.

令，，在单调递增，在单调递减.

又，，.

所以且.

四、选考题（2选1）

22.在直角坐标系中，以坐标原点为极点，轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线的极坐标方程为.

（1）将的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）设点的直角坐标为，为上的动点，点满足，写出的轨迹的参数方程，并判断与是否有公共点.

答案：

见解析

解析：  
（1）.

（2）设，，由

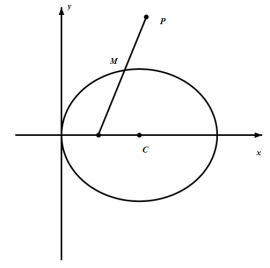
.

又在上，所以

.

则为为圆心，半径为的圆，所以

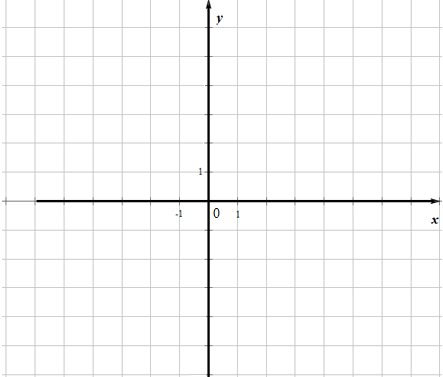
所以，两圆为内含关系，所以，圆与圆无公共点.



23.已知函数，.

（1）画出和的图象；

（2）若，求的取值范围.

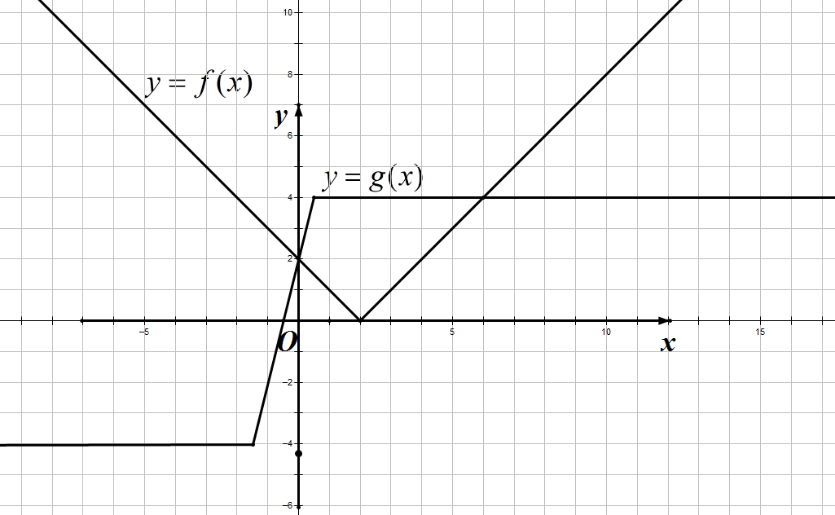


答案：

见解析；

解析：

（1）；



（2）当时，恒不满足，此时；

当时，恒成立，必有

.

当时，

时，，，所以.

时，，，令，所以.

时，，.

，所以.

所以，.